5. Se pide el cociente positivo, sin los extremos: $-\frac{5}{9}$ anula el numerador y la desigualdad es estricta, y $-\frac{1}{4}$ anula el denominador.

Resultado: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Suma de productos de tres consecutivos

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Resolución.

Proposición. Término general $n(n+1)(n+2)$; el sumando nuevo es $(k+1)(k+2)(k+3)$.

Base ($n = 1$). Izquierdo: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Derecho: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k$). $1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$.

Tesis ($n = k+1$). $1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$.

Paso inductivo. Se saca como factor común $(k+1)(k+2)(k+3)$:

$$\begin{aligned} &\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &\quad = (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4} + 1\right] = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}. \end{aligned}$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.5.2 · Suma de cubos de impares

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Resolución.

Proposición. Término general $(2n-1)^3$; el sumando nuevo es $(2(k+1)-1)^3 = (2k+1)^3$.

Base ($n = 1$). Izquierdo: $1^3 = 1$. Derecho: $1^2(2-1) = 1$. Se cumple.

Hipótesis ($n = k$). $1^3 + 3^3 + \cdots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$.

Tesis ($n = k+1$). $1^3 + \cdots + (2k+1)^3 = (k+1)^2\left(2(k+1)^2 - 1\right) = (k+1)^2(2k^2 + 4k + 1)$.

Paso inductivo. Aquí no hay factor común: se desarrollan los dos lados y se comparan.

$$\begin{aligned} k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3 &= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1. \end{aligned}$$

CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

Curso de Emergencia

Álgebra

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.4.0 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

2.3.2 Sumas con potencias

1. Escribe las potencias con la misma base: $\frac{1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^k}$, $2^k = 2\cdot 2^{k-1}$.
2. Lleva todo al denominador común más grande (3^{k+1}) o saca como factor la potencia más pequeña (2^{k-1}).
3. Agrupa el numerador y compáralo con el de la tesis.

2.3.3 Productos

1. El lado izquierdo de $P(k+1)$ es el producto hasta k **multiplicado** por el factor nuevo.
2. Sustituye el producto hasta k por la hipótesis y simplifica el factor nuevo a una sola fracción: $1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$.

2.3.4 Desigualdades sin variable en el denominador

1. Quita denominadores numéricos multiplicando por su mínimo común múltiplo (positivo: no cambia el sentido).
2. Despeja x. Si al final divides entre un número negativo, **invierte** el sentido.
3. Escribe el conjunto solución como intervalo.

2.3.5 Desigualdades racionales: puntos críticos

1. Pasa todo a un lado: $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ (o $\leq, >, \geq$). No multipliques por $D(x)$.
2. Une en una sola fracción y factoriza numerador y denominador en factores lineales. Si el coeficiente de x de un factor es negativo, multiplica ese factor por -1 e **invierte** el sentido.
3. **Puntos críticos:** las raíces del numerador y del denominador. Ordénalos en la recta.
4. **Tabla de signos:** un renglón por factor y una columna por intervalo. El signo del cociente es el producto de los signos.
5. Elige los intervalos con el signo pedido. Las raíces del numerador entran solo con $\leq$ o $\geq$; las del denominador nunca.

2.3.6 Desigualdades con valor absoluto

1. $|A| < c$ con $c > 0$: resuelve $-c < A < c$. $|A| > c$: resuelve $A < -c$ o $A > c$ y une.
2. Como los dos lados son no negativos, la desigualdad equivale a la de sus cuadrados:
   - $\left|\frac{A}{B}\right| < c$ (con $B \neq 0$): $A^2 < c^2B^2$;
   - $|A| < |B|$: $A^2 < B^2$, sin ninguna constante.
3. Pasa todo a un lado y factoriza como **diferencia de cuadrados**: $A^2 - (cB)^2 = (A - cB)(A + cB)$ en el primer caso y $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ en el segundo.
4. Resuelve la desigualdad de dos factores lineales con la tabla de signos (sección 2.3.5) y quita los ceros de B.

Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Álgebra** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sirve a los dos planes de estudio con los que se imparte la asignatura:

- **Plan 2010**, con el programa aprobado en 2008: siete temas, de la introducción a las estructuras algebraicas.
- **Plan 2016**: seis temas. Empieza con trigonometría y no incluye estructuras algebraicas, que pasaron a Álgebra Lineal.

Los temas 2 a 6 son los mismos en los dos planes. El cuaderno sigue ese orden y agrega, marcadas, las unidades que son de un solo plan:

0. Antes de empezar: qué viene en el examen y **qué plan es el tuyo**.
1. Parte A: introducción al Álgebra (solo Plan 2010). Parte B: trigonometría (solo Plan 2016).
2. Números reales: inducción matemática y desigualdades.
3. Números complejos.
4. Polinomios.
5. Sistemas de ecuaciones lineales.
6. Matrices y determinantes.
7. Estructuras algebraicas (solo Plan 2010).

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

Objetivo de la asignatura (programa).

- *Plan 2010:* «El alumno analizará y aplicará los conceptos de los sistemas numéricos para utilizarlos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, polinomios, matrices, determinantes y estructuras algebraicas, para que de manera conjunta estos conceptos permitan al alumno iniciar el estudio de la física y la matemática aplicada.»
- *Plan 2016:* «El alumno analizará las propiedades de los sistemas numéricos y las utilizará en la resolución de problemas de polinomios, sistemas de ecuaciones lineales y matrices y determinantes, para que de manera conjunta estos conceptos le permitan iniciar el estudio de la física y la matemática aplicada.»

De dónde salen los ejercicios.

- Se revisaron los **58 exámenes finales publicados** de la asignatura: 17 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2014-1) y 41 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), más 3 exámenes parciales del Plan 2016. Varios tienen versiones A, B, C y D o de turno matutino y vespertino.
- Ninguno tiene resolución publicada. **Todas las resoluciones de este cuaderno son propias** y cada resultado se verificó con álgebra computacional.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos, y las figuras están redibujadas.
- Los ejercicios de la Unidad 7 vienen de los finales del Plan 2010 y de la serie de ejercicios de ese tema que acompañaba al programa.

Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará las propiedades de los números reales y sus subconjuntos, para demostrar algunas proposiciones por medio del método de Inducción Matemática y para resolver inecuaciones. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1): inducción en 10 y desigualdad en 7. En los 41 finales del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1) salen 42 problemas: inducción 23 y desigualdades 19.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (15 min) y la plantilla de inducción de la sección 2.3.1.
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro: 15 min cada uno.

2.1 Conceptos y expresiones

Los conjuntos numéricos. El programa construye los números paso a paso. Los *naturales* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ se definen con los postulados de Peano: el 1 es natural, todo natural tiene un sucesor y todo conjunto que contiene al 1 y al sucesor de cada uno de sus elementos contiene a todos los naturales. Los *enteros* $\mathbb{Z}$ se obtienen al agregar el cero y los negativos, y los *racionales* $\mathbb{Q}$ son los cocientes $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$; su expresión decimal es finita o periódica. Entre dos racionales siempre hay otro (densidad), pero la recta no se llena con ellos: $\sqrt{2}$, π y e son *irracionales*. Los *reales* $\mathbb{R}$ son racionales e irracionales juntos, y ya no tienen huecos (completitud). Esta parte casi no se evalúa: en los exámenes se pide demostrar por inducción o resolver una desigualdad.

Principio de inducción matemática. Sea $P(n)$ una proposición sobre los naturales. Si

1. $P(n_0)$ es verdadera (*base*), y
2. suponiendo verdadera $P(k)$ para un $k \geq n_0$ (*hipótesis de inducción*), se demuestra $P(k+1)$ (*paso inductivo*),

entonces $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$. Casi siempre $n_0 = 1$; cuando el enunciado dice «$\forall\, n \geq 2$», la base es $n = 2$.

El término general. En una suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, el último sumando escrito es el término general a_n. Para pasar de $P(k)$ a $P(k+1)$ se agrega *un* sumando: a_{k+1}, que se obtiene cambiando n por $k+1$ en el término general. Si el término general es 6^{n-1}, el sumando nuevo es 6^k; si es $(2n-1)^3$, es $(2k+1)^3$.

Propiedades de orden. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- si $a < b$, entonces $a + c < b + c$;
- si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$;

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

Instrucciones de emergencia

- **Tiempo:** 20 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** saber qué plan es el tuyo, qué unidades estudiar y en qué orden.
- Si eres de la Generación 2027 o posterior, tu plan es el 2026: usa *Curso de Emergencia, Álgebra y Geometría Analítica.*

0.1 ¿Qué plan es el tuyo?

Álgebra se imparte con dos programas. Los temas 2 a 6 son los mismos; cambian el primero y el último.

- **Cómo saberlo:** lo dice tu historia académica, que indica el plan de estudios de tu carrera. Confírmalo antes de inscribir el examen: el temario cambia.

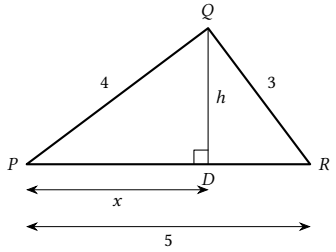
	Plan 2010	Plan 2016
Estudia	Unidades 2 a 7; lee la 1A (una página)	Unidades 1B y 2 a 6
No estudies	Unidad 1B	Unidades 1A y 7
El examen trae	números reales, complejos, polinomios, sistema de ecuaciones, matrices y una estructura algebraica	trigonometría, números reales, complejos, polinomios, sistema de ecuaciones y matrices

Las unidades de un solo plan lo dicen en su título y en su recuadro de instrucciones.

0.2 Cómo es el examen

Según los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1):

- **Duración:** 2 horas (2.5 horas hasta 2011-1).
- **Problemas:** 6 (en contados exámenes, 7), de 10 a 20 puntos cada uno, que suman 100.
- **Material:** ninguno. Las instrucciones dicen «No se permite el uso de calculadora». Los resultados se dejan **exactos**: $\frac{6^n-1}{5}$, $2\,\mathrm{cis}\,135^\circ$, $\sqrt{3}$. No hace falta sacar decimales.
- **Plantilla fija:** un problema por unidad y siempre en el mismo orden.
  - Plan 2010: (1) números reales, (2) complejos, (3) polinomios, (4) sistema de ecuaciones, (5) matrices, (6) estructura algebraica.
  - Plan 2016: (1) trigonometría, (2) números reales, (3) complejos, (4) polinomios, (5) sistema de ecuaciones, (6) matrices.
- **Demostraciones:** el problema de números reales es, la mitad de las veces, una demostración por inducción. Se califica la estructura (base, hipótesis y paso inductivo), no solo el resultado.



Resultado: $x = \frac{16}{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 1er parcial 2026-2, tipo B, problema 1.

En un reloj, el minutero mide 10 cm y el horario 7 cm. Calcule la distancia entre los extremos de las manecillas cuando el reloj marca exactamente las 5:00.

Resultado: $d = \sqrt{149 + 70\sqrt{3}}$ cm.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: 1er parcial 2026-2, tipo B, problema 2.

Determine si la siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{\cot^3 x - 1}{\cot x - 1} - \cot x = \csc^2 x.$$

Resultado: Sí es identidad (donde $\cot x \neq 1$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

1B.7 Errores frecuentes

- **Dividir entre** $\operatorname{sen} x$ **o** $\cos x$**.** Se pierden las soluciones en las que ese factor vale cero. Se factoriza y se iguala cada factor a cero.
- **Olvidar el segundo ángulo.** Cada valor de sen, cos o tan (distinto de ± 1 y de 0) da *dos* ángulos por vuelta.
- **No respetar el intervalo.** $(0^\circ, 360^\circ]$ incluye 360° y no 0°; $[-\pi, \pi]$ pide ángulos negativos y en radianes.
- **Elegir la forma equivocada de** $\cos 2x$**.** Si en la ecuación aparece $\operatorname{sen} x$, usa $1 - 2\operatorname{sen}^2 x$; si aparece $\cos x$, usa $2\cos^2 x - 1$.
- **Signo de** $\cos C$ **en la ley de cosenos.** Con C obtuso, $\cos C$ es negativo y el término $-2ab\cos C$ *suma*.
- **Ignorar el caso ambiguo.** La ley de senos da un seno; el ángulo puede ser agudo u obtuso.

1B.1) en la forma polar de la Unidad 3. El cuaderno sigue el orden del programa, pero conviene estudiar así:

Semana	Plan 2010	Plan 2016
1	Unidad 0 y Unidad 5	Unidad 0 y Unidad 5
2	Unidad 6	Unidad 6
3	Tabla de ángulos notables (1B.1) y Unidad 3	Unidad 1B y Unidad 3
4	Unidades 4 y 2	Unidades 4 y 2
5	Unidad 7 y simulacro (Apéndice B)	Simulacro (Apéndice B)

Ruta de 2 semanas.

- **Plan 2010.** Primera semana: Unidades 5, 6, 3 y 7. Segunda semana: Unidades 4 y 2 y un simulacro. La Unidad 7 va pronto porque su procedimiento es mecánico (una propiedad por renglón) y vale un sexto del examen.
- **Plan 2016.** Primera semana: Unidades 5, 6 y 1B. Segunda semana: Unidades 3, 4 y 2 y un simulacro.

En cada unidad, la ruta corta del recuadro de instrucciones dice qué leer primero. Si el tiempo no alcanza, se recorta dentro de cada unidad, nunca una unidad completa:

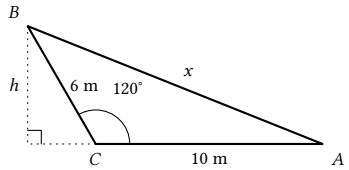
1. las conversiones de forma que no pide el enunciado (Unidad 3);
2. la cota de raíces (Unidad 4);
3. los determinantes de orden 5 (Unidad 6);
4. los isomorfismos (Unidad 7).

0.5 En el examen (120 minutos)

1. Lee todo el examen (5 minutos) y reparte el tiempo: unos 18 minutos por problema.
2. Empieza por el sistema de ecuaciones y la ecuación matricial: son procedimientos largos pero seguros.
3. Escribe el planteamiento antes de operar: la hipótesis de inducción, el sistema con sus incógnitas definidas, la ecuación matricial despejada con letras.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, usa un valor razonable en el siguiente y dilo.
5. Comprueba al final: sustituye la solución del sistema en las tres ecuaciones, multiplica la matriz por su inversa, evalúa el polinomio en las raíces que encontraste.

0.6 Formulario de emergencia

El formulario de todas las unidades está en el **Apéndice A**. El examen no permite formulario: conviene escribirlo a mano, desde cero, unos minutos cada día, hasta saberlo de memoria.



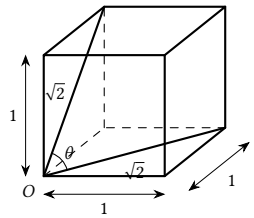
Resolución.

1. Dos lados y el ángulo entre ellos: ley de cosenos para $x = AB$.
2. $x^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos 120^\circ = 136 - 120\left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, así que $x = 14$ m.
3. a) Perímetro: $6 + 10 + 14 = \mathbf{30\ m}$.
4. b) La altura forma un triángulo rectángulo con hipotenusa $CB = 6$ y el ángulo exterior en C, $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
5. $h = 6\,\mathrm{sen}\,60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \mathbf{m}$.

Ejercicio 1B.5.7 · Ángulo en un cubo

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo A, problema 1.

En un cubo de arista 1 se trazan, desde un vértice O, la diagonal de la cara lateral y la diagonal de la base que salen de O (véase la figura); θ es el ángulo entre ellas. Obtenga el valor de $\tan^2\theta + 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta$.



Resolución.

1. Cada diagonal de cara mide $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
2. El tercer lado del triángulo une los extremos de las dos diagonales y es la diagonal de la cara posterior: también mide $\sqrt{2}$.
3. El triángulo es equilátero, así que $\theta = 60^\circ$.
4. $\tan^2 60^\circ + 4\,\mathrm{sen}^2\,60^\circ = (\sqrt{3})^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 + 3 = \mathbf{6}$.

Ejercicio 1B.5.8 · Identidad con fracciones

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 1.

Compruebe que

$$\frac{\tan x}{1 + \sec x} - \frac{2}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{-1 - \cos x}{\mathrm{sen}\,x}.$$

Resolución.

- los sistemas de ecuaciones y las matrices, en casi todo: circuitos, estructuras, gráficos por computadora y métodos numéricos;
- las estructuras algebraicas, en criptografía, códigos de corrección de errores y teoría de la computación.

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Expresión con ángulos notables

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 1.

Determine el valor de $x \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$x\sqrt{2}\cos 315^\circ + x\sqrt{2}\,\operatorname{sen} 135^\circ + 2\csc 330^\circ = \frac{4\operatorname{sen}180^\circ\cos 30^\circ + 4\cos 180^\circ\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}90^\circ}.$$

Resolución.

1. $\cos 315^\circ$: cuarto cuadrante, referencia 45°, coseno positivo: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\operatorname{sen}135^\circ$: segundo cuadrante, referencia 45°, seno positivo: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\csc 330^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen}330^\circ} = \frac{1}{-1/2} = -2$.
4. Lado izquierdo: $x\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + x\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2(-2) = x + x - 4 = 2x - 4$.
5. Lado derecho, con $\operatorname{sen}180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}90^\circ = 1$: $\frac{0+4(-1)\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = -2$.
6. $2x - 4 = -2$, de donde $x = \mathbf{1}$.

Ejercicio 1B.5.2 · Ecuación con secante y tangente

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de $\theta \in (0^\circ, 360^\circ]$ que satisfacen $2\sec^2\theta - 3 = \tan^2\theta$.

Resolución.

1. Una sola función con $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$: $2(1 + \tan^2\theta) - 3 = \tan^2\theta$.
2. $2 + 2\tan^2\theta - 3 = \tan^2\theta$, es decir, $\tan^2\theta = 1$ y $\tan\theta = \pm 1$.
3. $\tan\theta = 1$: referencia 45°, cuadrantes I y III: 45° y 225°.
4. $\tan\theta = -1$: cuadrantes II y IV: 135° y 315°.
5. En ninguno de los cuatro ángulos se anula el coseno, así que $\sec\theta$ y $\tan\theta$ existen.
6. $\theta \in \{45^\circ,\ 135^\circ,\ 225^\circ,\ 315^\circ\}$.

Ejercicio 1B.5.3 · Ecuación con ángulo doble

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Obtenga los valores de $x \in [0^\circ, 360^\circ]$ que satisfacen $\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen}x$.

Resolución.

1. Como aparece $\operatorname{sen}x$, se usa $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$: $1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen}x$.
2. $-2\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}x = 0$, o sea, $-2\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x + 2) = 0$.
3. $\operatorname{sen}x + 2 = 0$ da $\operatorname{sen}x = -2$: imposible, porque el seno está entre -1 y 1.
4. $\operatorname{sen}x = 0$: $x = 0^\circ$, 180° y 360°. Los dos extremos entran porque el intervalo es cerrado.
5. Comprobación con 180°: $\cos 360^\circ = 1$ y $1 + 4\operatorname{sen}180^\circ = 1$.
6. $x \in \{0^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ\}$.

Cuadrante	I	II	III	IV
Ángulos	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
Positivas	todas	sen, csc	tan, cot	cos, sec

Ángulos notables. Sin calculadora, los valores exactos salen de esta tabla.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Para 180°, 270° y 360° basta el punto del lado terminal: $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$. Así, $\operatorname{sen}180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{sen}270^\circ = -1$ y $\cos 270^\circ = 0$.

Reducción al primer cuadrante. El *ángulo de referencia* θ_r es el ángulo agudo entre el lado terminal y el eje x. La función de θ vale lo mismo que la de θ_r, con el signo del cuadrante:

$$\text{II: } \theta_r = 180^\circ - \theta, \qquad \text{III: } \theta_r = \theta - 180^\circ, \qquad \text{IV: } \theta_r = 360^\circ - \theta.$$

Por ejemplo, $\cos 315^\circ = +\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cuarto cuadrante) y $\csc 330^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen}330^\circ} = \frac{1}{-\operatorname{sen}30^\circ} = -2$. A un ángulo negativo o mayor que 360° se le suman o restan vueltas completas: -60° y 300° tienen las mismas funciones.

Identidades fundamentales. Son igualdades que se cumplen para todo ángulo en el que ambos lados están definidos.

- Recíprocas y de cociente: $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.
- Pitagóricas: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- Suma y diferencia: $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ y $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- Ángulo doble: $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
- Ángulo mitad (para $\frac{x}{2}$): $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ y $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.

Triángulos oblicuángulos. En un triángulo cualquiera con lados a, b, c opuestos a los ángulos A, B, C:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \quad \text{(ley de senos)},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \text{(ley de cosenos)}.$$

Los ángulos interiores suman 180° y el área es $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C$ (la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman).

Índice

Presentación y cómo usar este cuaderno 3

Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen 5

Unidad 1 · Parte A · Introducción al Álgebra (solo Plan 2010) 8

Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016) 10

Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades 20

Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones 31

Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes 41

Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros 53

Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes 64

Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010) 76

Apéndice A · Formulario 86

Apéndice B · Exámenes 89

Apéndice C · Fe de erratas 95

Apéndice D · Fuentes 97

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos 100

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Inducción con una suma geométrica

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 1.

Demuestre por inducción matemática que

$$P(n):\quad 1+6+6^2+\cdots+6^{n-1}=\frac{6^n-1}{5},\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Resolución.

Proposición. El término general es 6^{n-1}; el sumando que se agrega al pasar de k a $k+1$ es 6^k.

Base ($n=1$). Lado izquierdo: $6^0=1$. Lado derecho: $\frac{6-1}{5}=1$. Se cumple.

Hipótesis ($n=k$). $1+6+\cdots+6^{k-1}=\frac{6^k-1}{5}$.

Tesis ($n=k+1$). $1+6+\cdots+6^{k-1}+6^k=\frac{6^{k+1}-1}{5}$.

Paso inductivo. Se parte del lado izquierdo de la tesis y se usa la hipótesis:

$$\begin{aligned}1+6+\cdots+6^{k-1}+6^k &= \frac{6^k-1}{5}+6^k=\frac{6^k-1+5\cdot 6^k}{5}\\ &= \frac{6\cdot 6^k-1}{5}=\frac{6^{k+1}-1}{5}.\end{aligned}$$

Conclusión: por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$.

Ejemplo resuelto · Desigualdad racional

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 1.

Obtenga el conjunto de valores de x que satisfacen $\frac{3x-2}{4x+1}<3$.

Resolución.

1. Todo a un lado y una sola fracción:

$$\frac{3x-2}{4x+1}-3<0\ \Rightarrow\ \frac{3x-2-12x-3}{4x+1}<0\ \Rightarrow\ \frac{-9x-5}{4x+1}<0.$$

2. El numerador tiene coeficiente negativo: se multiplica por -1 y se invierte el sentido: $\frac{9x+5}{4x+1}>0$.
3. Puntos críticos: $x=-\frac{5}{9}$ (numerador) y $x=-\frac{1}{4}$ (denominador). En la recta, $-\frac{5}{9}<-\frac{1}{4}$.
4. Tabla de signos:

	$x<-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{9}<x<-\frac{1}{4}$	$x>-\frac{1}{4}$
$9x+5$	$-$	$+$	$+$
$4x+1$	$-$	$-$	$+$
cociente	$+$	$-$	$+$

Sin calculadora. Todos los exámenes lo prohíben. Por eso las resoluciones usan aritmética exacta: fracciones, radicales y ángulos notables.

Cómo usar este cuaderno

Cada unidad tiene la misma estructura:

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.
6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

Formato de cada resolución. Planteamiento → pasos numerados → **resultado** en negritas. Las demostraciones por inducción siguen siempre el orden proposición, base, hipótesis, paso inductivo y conclusión. Las de estructuras algebraicas revisan una propiedad por renglón, con «se cumple» o «no se cumple».

Rutas de estudio. La Unidad 0 dice qué unidades estudiar según tu plan y propone, para cada plan, una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas.

Regla de emergencia. Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.

- si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$: **multiplicar por un negativo invierte la desigualdad**.

Por eso una desigualdad con x en el denominador no se «pasa multiplicando»: no se sabe el signo del denominador.

Valor absoluto. $|a| = a$ si $a \geq 0$ y $|a| = -a$ si $a < 0$. Para $c > 0$:

$$|A| < c \iff -c < A < c, \qquad |A| > c \iff A < -c \text{ o } A > c.$$

Además $|A| < |B| \iff A^2 < B^2$, porque ambos lados son no negativos; y $\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$.

Intervalos. El conjunto solución se escribe con intervalos: (a, b) no incluye los extremos, $[a, b]$ sí; $(-\infty, a)$ y (b, ∞) son no acotados; la unión se escribe con $\cup$. Los valores que anulan un denominador **nunca** pertenecen al conjunto solución.

2.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«demostrar por inducción», una suma con … y un $\forall\, n \in \mathbb{N}$	base, hipótesis y paso inductivo	2.3.1
la suma tiene potencias: $1 + 6 + 6^2 + \ldots$, $\frac{2n+1}{3^n}$, $n\,2^{n-2}$	inducción con potencias	2.3.2
un producto $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots$	inducción con productos	2.3.3
«$\forall\, n \geq 2$»	la base es $n = 2$	2.3.1
una desigualdad sin x en el denominador	despeje directo	2.3.4
x en un denominador: $\frac{3x-2}{4x+1} < 3$	puntos críticos y tabla de signos	2.3.5
$\lvert A\rvert < c$, $\lvert A\rvert > c$, $\left\lvert\frac{A}{B}\right\rvert < c$ o $\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$	valor absoluto, elevando al cuadrado	2.3.6

2.3 Procedimientos

2.3.1 Plantilla de una demostración por inducción

1. **Proposición.** Escribe $P(n)$ completa e identifica el término general (el último sumando).
2. **Base.** Sustituye $n = 1$ (o $n = n_0$) en *los dos lados*: el lado izquierdo es solo el primer sumando. Escribe «Se cumple».
3. **Hipótesis.** Escribe $P(k)$: la misma igualdad con k en lugar de n.
4. **Tesis.** Escribe $P(k+1)$: con $k+1$ en lugar de n, simplificando solo lo obvio ($2(k+1)-1 = 2k+1$). Es lo que hay que obtener.
5. **Paso inductivo.** Parte del lado izquierdo de $P(k+1)$: es el lado izquierdo de $P(k)$ más el sumando nuevo. Sustituye la suma hasta k por el lado derecho de la hipótesis.
6. Opera hasta llegar al lado derecho de la tesis. Conviene **factorizar** lo común en lugar de desarrollar todo.
7. **Conclusión.** «Por el principio de inducción matemática, $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.»

0.3 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los finales publicados. Las versiones del mismo examen (tipos A a D, turnos) cuentan por separado: 17 versiones de 10 aplicaciones en el Plan 2010 y 41 versiones de 21 aplicaciones en el Plan 2016.

Unidad	Tema	Plan 2010	Plan 2016
1A	Introducción al Álgebra	0 de 17	—
1B	Trigonometría: ecuaciones, triángulos, identidades	—	**40 de 41**
2	Inducción matemática y desigualdades	**17 de 17**	**41 de 41**
3	Números complejos	**17 de 17**	**41 de 41**
4	Polinomios	**17 de 17**	**41 de 41**
5	Sistemas de ecuaciones lineales	**17 de 17**	**41 de 41**
6	Matrices y determinantes	**17 de 17**	**41 de 41**
7	Estructuras algebraicas	**17 de 17**	—

Observaciones:

- Todas las unidades de tu plan salen en todos los exámenes, una vez cada una: **cada unidad vale alrededor de un sexto del examen**. No hay unidades que se puedan saltar; la diferencia está en los subtemas.
- Lo que más sale dentro de cada unidad:
  - Unidad 1B: ecuaciones trigonométricas (20 de 40) y triángulos o figuras (14 de 40).
  - Unidad 2: inducción (10 de 17 en el Plan 2010; 23 de 41 en el Plan 2016); el resto, desigualdades.
  - Unidad 3: una ecuación en los complejos que pide pasar entre las formas binómica, polar y exponencial; a menudo con datos en el diagrama de Argand.
  - Unidad 4: raíces de un polinomio a partir de una raíz o un factor dado.
  - Unidad 5: el problema de planteamiento (12 de 17 en el Plan 2010) y el sistema con parámetro (21 de 41 en el Plan 2016).
  - Unidad 6: una ecuación matricial (16 de 17 y 30 de 41).
  - Unidad 7: «¿es grupo?» y los idénticos e inversos de una operación.
- Del programa casi no se evalúan: la historia del Álgebra, los postulados de Peano y la construcción de los enteros y los racionales, el método de condensación y la regla de Cramer. Se mencionan, pero no se desarrollan.
- **Para el Plan 2010:** desde 2016 solo se publican exámenes del Plan 2016. Sus problemas de las unidades 2 a 6 son la referencia más reciente para los dos planes; por eso el cuaderno usa los dos bancos.

0.4 Orden de estudio

Como todas las unidades pesan lo mismo, el orden va por facilidad y por dependencia: el método de Gauss (Unidad 5) se usa en la Unidad 6, y la tabla de ángulos notables (sección

- **Mover términos en una identidad.** Se transforma un solo lado; pasar términos de un lado al otro supone lo que se quiere demostrar.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $180^\circ = \pi$; tabla de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (sección 1B.1). Positivas: I todas, II sen, III tan, IV cos.
- Ángulo de referencia: II $180^\circ - \theta$, III $\theta - 180^\circ$, IV $360^\circ - \theta$.
- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; área $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$.
- Cubo de arista a: diagonal de cara $a\sqrt{2}$, diagonal del cubo $a\sqrt{3}$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Lee el intervalo y la unidad (grados o radianes) antes de empezar, y subráyalos.
2. Ecuación: una sola función, factorizar, cada factor con su lista de ángulos, revisar extremos.
3. Triángulo: dibuja de nuevo la figura con los datos; decide entre triángulo rectángulo, ley de senos o ley de cosenos.
4. Identidad: todo en senos y cosenos, un solo lado, sin mover términos.
5. Comprueba un ángulo en la ecuación original y escribe el resultado como conjunto.

Unidad 1 · Parte A · Introducción al Álgebra (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura, Plan 2010). El alumno conocerá la importancia de los conocimientos del Álgebra a través de la historia, para comprender los fundamentos de la matemática utilizada en ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 la Unidad 1 es Trigonometría: salta a la Parte B.
- **Frecuencia:** no aparece en ninguno de los 17 finales del Plan 2010.
- **Tiempo:** 10 minutos de lectura. No tiene ejercicios.

1A.1 Qué es el Álgebra

El Álgebra estudia las operaciones y sus propiedades. Empezó como el arte de resolver ecuaciones y hoy estudia las estructuras que forman los conjuntos con sus operaciones.

- **Origen del nombre.** En el siglo IX, al-Juarismi escribió un tratado sobre cómo resolver ecuaciones por *al-jabr* (pasar un término restado al otro lado) y *al-muqabala* (reducir términos semejantes). De *al-jabr* viene «álgebra»; de su nombre, «algoritmo».
- **Las ecuaciones.** Los babilonios ya resolvían problemas que hoy son ecuaciones de segundo grado. En el siglo XVI, los matemáticos italianos encontraron las fórmulas para las de tercer y cuarto grado, y para escribirlas tuvieron que aceptar las raíces de números negativos: así nacieron los números complejos (Unidad 3).
- **La notación.** Vieta usó letras para las cantidades conocidas y Descartes fijó la costumbre de x, y, z para las incógnitas. Su regla de los signos se usa en la Unidad 4.
- **Los sistemas y las matrices.** Gauss sistematizó la eliminación que lleva su nombre (Unidad 5); en el siglo XIX, Cayley y Sylvester crearon el álgebra de matrices y los determinantes (Unidad 6).
- **Las estructuras.** Galois demostró que las ecuaciones de grado cinco o mayor no tienen una fórmula general con radicales, y para hacerlo estudió los grupos. De ahí viene el álgebra moderna: grupos, anillos y campos (Unidad 7).
- **Los números.** A finales del siglo XIX, Peano dio los axiomas de los números naturales y Dedekind construyó los reales. Esa construcción ordena la Unidad 2: de los naturales a los enteros, los racionales y los reales.

1A.2 Por qué importa en ingeniería

Cada unidad de este cuaderno es una herramienta que se usa después:

- la inducción, para demostrar que un algoritmo es correcto para cualquier tamaño de entrada;
- los números complejos, en circuitos de corriente alterna y en señales;
- los polinomios, en control y en interpolación;

1. Se transforma el lado izquierdo. En senos y cosenos: $\frac{\tan x}{1+\sec x} = \frac{\operatorname{sen} x/\cos x}{(\cos x+1)/\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.
2. Se multiplica por $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$: $\frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
3. Con el común denominador $\operatorname{sen} x$: $\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos x-2}{\operatorname{sen} x} = \frac{-1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
4. Se llegó al lado derecho: **la identidad se cumple** (donde $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ y $\cos x \neq -1$: en $\cos x = 0$ no están definidas $\tan x$ ni $\sec x$).

1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 1.

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 0$ en el intervalo $(0^\circ, 360^\circ]$.

Resultado: $\alpha \in \{120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ,\ 360^\circ\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 1.

Determine todos los valores de $x \in [0^\circ, 360^\circ)$ que satisfacen $8\cos 2x = 8\cos x - 8$.

Resultado: $x \in \{60^\circ,\ 90^\circ,\ 270^\circ,\ 300^\circ\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo C, problema 1.

Obtenga la solución de la ecuación $2\sec^2 x - 3 = 1 - \sec^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Resultado: $x \in \left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 1.

En el triángulo PQR de la figura, $PQ = 4$, $QR = 3$ y $PR = 5$. La altura QD cae sobre el lado PR. Calcule la longitud $x = PD$.

Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno reforzará los conceptos de trigonometría para lograr una mejor comprensión del álgebra.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2016. En el Plan 2010 la trigonometría no está en el programa: salta a la Unidad 2. La tabla de ángulos notables (sección 1B.1) sirve a todos para la forma polar de la Unidad 3.
- **Frecuencia:** aparece en 40 de los 41 finales del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1), casi siempre como problema 1, con un valor de 10 a 15 puntos. De esos 40 problemas, 20 son ecuaciones trigonométricas, 14 son triángulos o figuras (Pitágoras, ley de senos, ley de cosenos, perímetros, áreas, distancias), 4 son identidades y 2 piden evaluar una expresión con ángulos notables.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Aprende de memoria la tabla de la sección 1B.1 y las identidades del formulario 1B.8 (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 1B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1B.5.2, 1B.5.3, 1B.5.5 y 1B.5.6 con cronómetro (12 min cada uno).

1B.1 Conceptos y expresiones

Medida de ángulos. Un ángulo se mide en grados o en radianes: $180^\circ = \pi$ rad, así que $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$. El intervalo que pide el enunciado decide la unidad de la respuesta: $[0^\circ, 360^\circ)$ en grados, $[0, \pi]$ o $[-\pi, \pi]$ en radianes.

Funciones de un ángulo cualquiera. Se coloca el ángulo θ en posición normal (vértice en el origen, lado inicial sobre el eje x positivo) y se toma un punto (x, y) de su lado terminal, a distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del origen:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}.$$

En el triángulo rectángulo. Si θ es un ángulo agudo, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ y $\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$. El teorema de Pitágoras relaciona los lados: $a^2 + b^2 = c^2$, con c la hipotenusa.

Signos por cuadrante. El signo de cada función depende del cuadrante en el que cae el lado terminal (r siempre es positivo).

Ejercicio 1B.5.4 · Ecuación en radianes

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1.

Obtenga los valores de θ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ que satisfacen $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 2 = 0$.

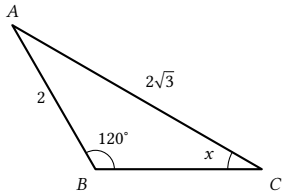
Resolución.

1. Se divide entre 2 y se toma $u = \cos\theta$: $2u^2 - u - 1 = 0$, que se factoriza como $(2u + 1)(u - 1) = 0$.
2. $\cos\theta = 1$: en $[-\pi, \pi]$ solo $\theta = 0$.
3. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$: referencia $\frac{\pi}{3}$, coseno negativo en los cuadrantes II y III. En $[-\pi, \pi]$ el cuadrante III se escribe con ángulo negativo: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ y $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.
4. $\theta \in \left\{-\frac{2\pi}{3},\ 0,\ \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Ejercicio 1B.5.5 · Ley de senos con ángulo obtuso

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 1.

En el triángulo ABC de la figura, $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ y el ángulo en B mide 120°. Determine el ángulo x en el vértice C.



Resolución.

1. Se conoce el lado $AC = 2\sqrt{3}$ con su ángulo opuesto $B = 120^\circ$, y el lado $AB = 2$, opuesto a x: ley de senos.
2. $\frac{\operatorname{sen} x}{2} = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{2\sqrt{3}}$, con $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\operatorname{sen} x = \frac{2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$.
4. Caso ambiguo: $x = 30^\circ$ o $x = 150^\circ$. Como $B = 120^\circ$ ya es obtuso, x es agudo.
5. $x = 30^\circ$. (El tercer ángulo también mide 30°: el triángulo es isósceles con $BC = 2$.)

Ejercicio 1B.5.6 · Ley de cosenos: perímetro y altura

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 1.

En el triángulo ABC de la figura, $CB = 6$ m, $CA = 10$ m y el ángulo en C mide 120°. La altura h es la distancia de B a la prolongación del lado CA. Determine: a) el perímetro del triángulo; b) la altura h.

Caso ambiguo. Si se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, la ley de senos da $\operatorname{sen} B$, y hay dos ángulos con ese seno: B y $180^\circ - B$. Se acepta cada uno solo si los ángulos del triángulo siguen sumando menos de 180°. Si el ángulo dado es obtuso, el otro ángulo es forzosamente agudo y la solución es única.

1B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determinar el valor de x» en una expresión con $\operatorname{sen} 315^\circ$, $\csc 330^\circ$, $\cos 180^\circ$…	Reducir al primer cuadrante y sustituir la tabla (1B.3.1)
«Valores de x en $[0^\circ, 360^\circ)$ que satisfacen…» con $\sec^2$, $\tan^2$, $\cos 2x$, $\cos^2$	Ecuación trigonométrica: una sola función, factorizar, listar ángulos (1B.3.2)
Triángulo con un ángulo recto o una altura marcada	Funciones en el triángulo rectángulo y Pitágoras (1B.3.3)
Triángulo con un ángulo obtuso, dos lados y un ángulo, o tres lados	Ley de senos o ley de cosenos (1B.3.3)
«Perímetro», «área», «altura», «distancia» en una figura	Resolver el triángulo y después sumar o multiplicar (1B.3.3)
Cubo, prisma o figura en el espacio	Buscar el triángulo plano que contiene al ángulo (1B.3.5)
«Compruebe», «verifique» o «demuestre» una igualdad	Identidad: transformar un solo lado hasta llegar al otro (1B.3.4)

1B.3 Procedimientos

1B.3.1 Evaluar una expresión con ángulos notables

1. Para cada función, ubica el cuadrante y el ángulo de referencia.
2. Escribe el valor de la tabla con el signo del cuadrante. Las recíprocas (csc, sec, cot) se invierten al final.
3. Sustituye y simplifica con fracciones y radicales. Si la incógnita aparece multiplicando, despéjala al final.

1B.3.2 Resolver una ecuación trigonométrica

1. Pasa todo a **una sola función** con las identidades: $\sec^2 = 1 + \tan^2$, $\csc^2 = 1 + \cot^2$, $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ si aparece $\operatorname{sen} x$, o $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ si aparece $\cos x$.
2. Iguala a cero y factoriza (factor común o trinomio en $u = \cos x$ o $u = \operatorname{sen} x$). **No dividas** entre $\operatorname{sen} x$ ni $\cos x$: se pierden soluciones.
3. Cada factor da un valor básico: descarta los imposibles ($\operatorname{sen} x = -2$, $\cos x = 3$).
4. Para cada valor, busca el ángulo de referencia y los dos cuadrantes donde la función tiene ese signo.
5. Lista los ángulos **dentro del intervalo pedido**: revisa si sus extremos están incluidos ($(0^\circ, 360^\circ]$ incluye 360° y excluye 0°).
6. Comprueba un valor en la ecuación original, sobre todo si había sec, csc, tan o cot, que no existen en algunos ángulos.

1B.3.3 Resolver un triángulo

1. Marca en la figura lo que se conoce y lo que se pide. Nombra los lados con la letra minúscula del vértice opuesto.
2. Si hay un ángulo recto (o una altura), usa sen, cos, tan y Pitágoras en ese triángulo rectángulo.
3. Si no lo hay: con **dos lados y el ángulo entre ellos** o con **tres lados**, ley de cosenos; con **un lado y su ángulo opuesto** conocidos, ley de senos.
4. Si la ley de senos da un ángulo, revisa el caso ambiguo (sección 1B.1).
5. Perímetro: suma de los tres lados. Área: $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$ o $\frac{1}{2}\cdot$ base $\cdot$ altura.

1B.3.4 Comprobar una identidad

1. Elige el lado más complicado y transfórmalo; el otro no se toca.
2. Escribe todo en senos y cosenos.
3. Suma fracciones con común denominador, factoriza (diferencia de cuadrados, diferencia de cubos) y aplica $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$.
4. Termina cuando llegues exactamente al otro lado. **No pases términos de un lado al otro**: eso supone que la igualdad ya es cierta.

1B.3.5 Figuras en el espacio

1. Identifica los tres puntos del triángulo que contiene al ángulo pedido.
2. Calcula sus lados con Pitágoras: la diagonal de una cara de un cubo de arista a mide $a\sqrt{2}$ y la diagonal del cubo, $a\sqrt{3}$.
3. Si el triángulo resulta equilátero, rectángulo o isósceles, el ángulo sale directo; si no, aplica la ley de cosenos.

1B.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Ecuación de segundo grado en coseno

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 1.

Resuelva la ecuación $2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1 = 0$ en el intervalo $(0^\circ, 360^\circ]$.

Resolución.

1. La ecuación ya tiene una sola función. Con $u = \cos\alpha$ queda $2u^2 + 3u + 1 = 0$.
2. Se factoriza: $(2u+1)(u+1) = 0$, así que $u = -\frac{1}{2}$ o $u = -1$.
3. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$: el ángulo de referencia es 60° y el coseno es negativo en los cuadrantes II y III, así que $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ y $\alpha = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.
4. $\cos\alpha = -1$: $\alpha = 180^\circ$.
5. Los tres ángulos están en $(0^\circ, 360^\circ]$. Comprobación con 120°: $2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$.
6. $\alpha \in \{120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ\}$.